Paraméter
Megoldások

1) Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x)=(p-3,5)x^2+2(p-2)x+6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x=-2$ zérushelye a függvénynek! (2 pont)

b) Milyen p érték esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb? (14 pont)

Megoldás:

a) Behelyettesítve $x=-2$ értékét: $f(-2)=(p-3,5)\cdot 4-4(p-2)+6=$

$=\mathbf{4p-14-4p+8+6=0}$ (2 pont)

b) $p\neq 3,5$, mert ekkor az egyenlet nem másodfokú (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_{1,2}=\dfrac{-2(p-2)\pm\sqrt{4(p-2)^2-24(p-3,5)}}{2(p-3,5)}=$ (1 pont)

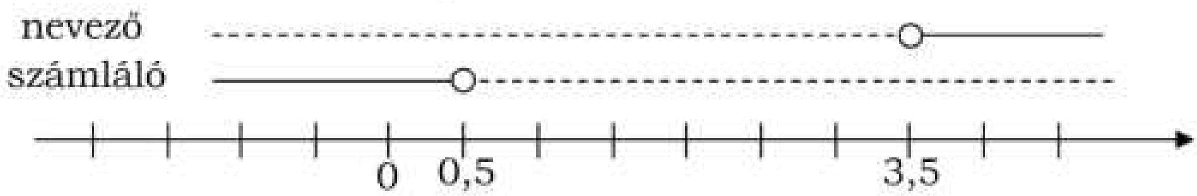
$=\dfrac{-p+2\pm\sqrt{p^2-10p+25}}{p-3,5}$ (1 pont)

$=\dfrac{-p+2\pm(p-5)}{p-3,5}\Rightarrow$ (2 pont)

$x_1=\dfrac{-3}{p-3,5}$; $x_2=-2$ (1 pont)

A $\dfrac{-3}{p-3,5}>1$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Az egyenlőtlenséget rendezve: $\dfrac{-p+0,5}{p-3,5}>0$ (2 pont)



A számláló és a nevező pozitív (teli vonal) és negatív (szaggatott vonal) intervallumainak feltüntetéséért 2-2 pont jár. (4 pont)

Az egyenlőtlenség teljesül, ha $\mathbf{0,5<p<3,5}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

2)

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;7]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$ függvényt! (4 pont)

b) Adja meg az f függvény értékkészletét! (2 pont)

c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $\left|x^2-6x+5\right|=p$ egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon? (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények - Analízis 17. feladat*

b) *Lásd: Függvények - Analízis 17. feladat*

c) A lehetséges megoldások a grafikonról leolvashatók (1 pont)

Ha $p<0$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)

Ha $p=0$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)

Ha $0<p<4$, **akkor 4 megoldás van** (1 pont)

Ha $p=4$, **akkor 3 megoldás van** (1 pont)

Ha $4<p\le 5$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)

Ha $5<p\le 12$, **akkor 1 megoldás van** (1 pont)

Ha $12<p$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)

Összesen: 14 pont

3) A „TOJÁS" farmon átlagosan 10000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalták, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt– ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.

a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés? (5 pont)

Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának p %-kal történő csökkenése $2p$ %-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p<30$ esetén érvényes.

b) Hány százalékkal csökkentették tavaly a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt? (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 10. feladat*

b) A keresett százalékot p-vel jelölve $(p<30)$, a tyúkok számát p %-kal csökkentve adódik, hogy számuk $10000\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)$ (1 pont)

Az 1 tojóra jutó termelés $\frac{2,2\cdot 10^6}{10000}\cdot\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ lett (2 pont)

A szöveg szerint $10000\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{2,2\cdot 10^6}{10000}\cdot\left(1+\frac{2p}{100}\right)=2,2\cdot 10^6\cdot 1,08$ (1 pont)

Azaz $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{2p}{100}\right)=1,08$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát 10000-el beszorozva $(100-p)(100+2p)=10800$ (1 pont)

A szorzás elvégzése után: $10000+100p-2p^2=10800$ (1 pont)

Rendezés után: $p^2-50p+400=0$ másodfokú egyenlethez jutunk (1 pont)

Ennek megoldásai: 40 és 10 (1 pont)

Mivel $p<30$, így csak 10 lehet a megoldás (1 pont)

Ellenőrizve, ha a 9000-re csökkentett létszám esetén 20%-kal nő az egy tyúkra jutó tojásmennyiség, azaz $\frac{2,2\cdot 10^6}{10000}\cdot 1,2$ lesz, ekkor az évi termelés $2,2\cdot 10^6\cdot 1,08$

Tehát **10%-kal kell csökkenteni** a tyúkok számát. (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) **a)** **Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).**

Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!

Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!

Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! **(11 pont)**

b) **Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!** **(5 pont)**

Megoldás:

a) A differenciálható f függvénynek az $x=1$ akkor lehet szélsőértékhelye, ha itt az első deriváltja nulla (1 pont)

Mivel $f'(x)=3x^2+2kx+9$ (1 pont)

Ezért $f'(1)=3+2k+9=0$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{k=-6}$ (1 pont)

Erre a k értékre $f'(x)=3x^2-12x+9$ (1 pont)

A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ (2 pont)

Az $\boldsymbol{x=1}$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált (1 pont)

ezért itt az f függvénynek **lokális maximuma van** (1 pont)

A derivált $\boldsymbol{x=3}$ helyen negatívból pozitívba vált (1 pont)

ezért itt az f függvénynek **lokális minimuma van** (1 pont)

b) *Lásd: Függvények - Analízis 7s. feladat*

Összesen: 16 pont

5) **Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x)=-3x^3+(p-3)x^2+p^2x-6$.**

a) **Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrált, ha $p=3$** **(4 pont)**

b) **Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x=1$ zérushelye legyen az f függvénynek!** **(3 pont)**

c) **Határozza meg p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x=1$ helyen pozitív legyen!** **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények - Analízis 16. feladat*

b) $-3+(p-3)+p^2-6=0$ (1 pont)

Rendezve: $p^2+p-12=0$ (1 pont)

Ennek a megoldásából adódik, hogy $\boldsymbol{p=3}$ vagy $\boldsymbol{p=-4}$ esetén lesz a megadott függvénynek zérushelye az 1. (1 pont)

c) Deriváltfüggvény: $f'(x)=-9x^2+2(p-3)x+p^2$ (2 pont)

$x=1$-hez tartozó helyettesítési érték: $p^2+2p-15$ (1 pont)

$p^2+2p-15>0$ egyenlőtlenség megoldható (1 pont)

$p^2+2p-15=0$ egyenlet megoldásai 3 és -5 (1 pont)

mivel $p^2+2p-15>0$ bal oldalának főegyütthatója pozitív (1 pont)
ezért az egyenlőtlenség teljesül, ha $\boldsymbol{p<-5}$ **vagy** $\boldsymbol{p>3}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

6) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében: $\underline{a}(\cos t;\sin t)$ és $\underline{b}\left(\sin^2 t;\cos^2 t\right)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 7. feladat*

b) *Lásd: Koordinátageometria 7. feladat*

c) A két vektor akkor és csak akkor merőlege egymásra, ha $ab=0$ (1 pont)

A keresett t ismeretlent a szokásosabb módon x jelöli. Mivel $\underline{ab}=\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x$, így a $\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x=0$ egyenlet megoldása a feladat. Azonos átalakítással adódik:

$\cos x\sin x(\sin x+\cos x)=0$ (1 pont)

Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha

$\cos x=0$ vagy $\sin x=0$ vagy $\sin x+\cos x=0$ (1 pont)

(1) $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, ahol $n\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)

(2) $x=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)

(3) $\sin x+\cos x=0$

A (3) alatti egyenletnek nem megoldásai azok az x számok, amelyek koszinusza 0, így az egyenlet megoldáshalmaza azonos a $\operatorname{tg}x=-1$ egyenletével

(1 pont)

Azaz $x=\frac{3\pi}{4}+m\pi$, ahol $m\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

A két vektor tehát pontosan akkor merőleges egymásra, ha $\boldsymbol{t=n\cdot\frac{\pi}{2}}$ vagy $\boldsymbol{t=\frac{3\pi}{4}+m\pi}$**, ahol** $\boldsymbol{n,m\in\mathbb{Z}}$

Összesen: 14 pont

7)

a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x+y=10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? (6 pont)

b) Jelölje e azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x+y=b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek? (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 1. feladat*

b) Az egyenesnek és a körnek akkor és csak akkor van közös pontja, ha az egyenleteikből álló egyenletrendszernek van megoldása (1 pont)

A kör egyenlete: $x^2+y^2=16$ (1 pont)

Az egyenes egyenletéből $y=b-2x$.

Behelyettesítés után: $x^2+(b-2x)^2=16$ (1 pont)

$5x^2-4bx+b^2-16=0$ (1 pont)

A kapott másodfokú egyenletnek van megoldása, ha a D diszkrimináns nem negatív (1 pont)

$D=320-4b^2\geq 0$ (1 pont)

ahonnan $|b|\leq 4\sqrt{5}$ (1 pont)

A b paraméter lehetséges értékei tehát a $\left[-4\sqrt{5};4\sqrt{5}\right]$ elemei (1 pont)

Összesen: 14 pont

8)

a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ függvényt! (5 pont)

b) Tekintsük az $\left|(x-2)^2-1\right|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvény a $k\in\left]-6;6\right[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 6. feladat*

b) A megoldások számát az $f(x)$ teljes grafikonja és az $y=k$ egyenes közös pontjainak száma adja (2 pont)

Ha $k>1$, akkor két közös pontja van (1 pont)

Ha $k=1$, akkor három közös pontja van (1 pont)

Ha $0<k<1$, akkor négy közös pontja van (1 pont)

Ha $k=0$, akkor két közös pontja van (1 pont)

Ha $k<0$, akkor nincs közös pont (1 pont)

c) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 4. feladat*

d) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 4. feladat*

Összesen: 16 pont

9) A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge $60°$-os. (16 pont)

Megoldás:

Az ABC háromszög AC oldalára felírva a koszinusztételt:

$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot 0{,}5$ (2 pont)

$AB^2=50$ (1 pont)

$BC^2=16+(p+4)^2$ (1 pont)

$p^2+8p+32$ (1 pont)

$AC^2=81+(p-1)^2$ (1 pont)

$p^2-2p+82$ (1 pont)

A kapott értékeket visszahelyettesítve a koszinusztételbe a következőt kapjuk:

$p^2-2p+82=p^2+8p+32-\sqrt{50}\cdot\sqrt{p^2+8p+21}$ (1 pont)

Rendezve: $\sqrt{50\left(p^2+8p+32\right)}=10p$ (2 pont)

Mivel a baloldalon pozitív szám áll ezért $p>0$ (1 pont)

Négyzetre emelve és egyszerűsítve:

$p^2+8p+32=2p^2$ (1 pont)

Amiből adódik $p^2-8p-32=0$ (1 pont)

Ebbek az egyenletnek a gyökei:

$p_1=4+4\sqrt{3}\quad p_2=4-4\sqrt{3}$ (2 pont)

Mivel $p>0$, ezért csak a $\boldsymbol{p_1=4+4\sqrt{3}}$ megoldás lesz jó (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) Adott az $x^2+y^2+4x-16y+34=0$ egyenletü k kör.

a) Igazolja, hogy az $E(-7;\ 5)$ pont rajta van a k körön! (2 pont)

b) Írja fel a *k* kör *E* pontjában húzható érintőjének egyenletét! (5 pont)

c) Határozza meg az *m* valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y=mx$ egyenletü *e* egyenesnek és a *k* körnek ne legyen közös pontja! (9 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 24. feladat*

b) *Lásd: Koordinátageometria 24. feladat*

c) Az e egyenesnek és a k körnek nincs közös pontja, ha az $x^2+(mx)^2+4x-16\cdot mx+34=0$ egyenletnek nincs valós megoldása. (1 pont)

Rendezve: $(m^2+1)x^2+(4x-16m)x+34=0$. (1 pont)

Ennek a másodfokú egyenletnek pontosan akkor nincs valós megoldása, ha a diszkriminánsa negatív. (1 pont)

$D=(4x-16m)^2-136(m^2+1)=$ (1 pont)

$=120m^2-128m-120=8(15m^2-16m-15)$ (1 pont)

A $15m^2-16m-15=0$ egyenlet gyökei $-\dfrac{3}{5}$ és $\dfrac{5}{3}$. (1 pont)

Mivel az egyenletben a másodfokú tag együtthatója pozitív, (1 pont)

ezért $15m^2-16m-15<0$ pontosan akkor teljesül, ha $-\dfrac{3}{5}<m<\dfrac{5}{3}$. A k körnek és az e egyenesnek nincs közös pontja, ha $\boldsymbol{m\in\left]-\frac{3}{5};\frac{5}{3}\right[}$. (2 pont)

Összesen: 16 pont

11) a) Határozza meg a $p>0$ paraméter értékét úgy, hogy $\displaystyle\int_0^p\left(3x^2-24x+20\right)dx=0$ teljesüljön! (5 pont)

b) Határozza meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28$ $(x \in \mathbb{R})$ függvénynek $x = 2$- ben $x = 2$ – ben $x = 2$-ben zérushelye, $x = -4$-ben lokális maximumhelye, $x = -1$-ben pedig inflexiós pontja legyen! **(11 pont)**

Megoldás:

a) $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)\,dx = \left[x^3 - 12x^2 + 20x\right]_0^p$ (2 pont)

Megoldandó a $p^3 - 12p^2 + 20p = 0$ egyenlet. (1 pont)

Mivel $p > 0$, ezért ez ekvivalens a $p^2 - 12p + 20 = 0$ másodfokú egyenlettel. (1 pont)

Ennek (pozitív) gyökei a **2** és a **10**, ezek tehát a p lehetséges értékei. (1 pont)

b) A zérushelyre vonatkozó előírás miatt $8a + 4b + 2c + 28 = 0$. (1 pont)

(A lokális maximumhelyre vonatkozó előírás teljesülésének szükséges feltétele, hogy a függvény deriváltja a -4 helyen 0 legyen.)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (1 pont)

$f'(-4) = 48a - 8b + c = 0$ (1 pont)

(Az inflexiós pontra vonatkozó előírás teljesülésének szükséges feltétele, hogy a függvény második deriváltja a -1 helyen 0 legyen.)

$f''(x) = 6ax + 2b$ (1 pont)

$f''(-1) = -6a + 2b = 0$ (1 pont)

Megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 8a + 4b + 2c + 28 &= 0 \\ 48a - 8b + c &= 0 \\ -6a + 2b &= 0 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az egyenletrendszer harmadik egyenletéből $b = 3a$. Ezt az első két egyenletbe helyettesítve (és egyszerűsítve) a

$$\left.\begin{aligned} 10a + c &= -14 \\ 24a + c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

kétismeretlenes egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldása $\boldsymbol{a = 1}$ és $\boldsymbol{c = -24}$, tehát $\boldsymbol{b = 3}$. (3 pont)

(A lokális maximumhely és az inflexiós pont elégséges feltételének vizsgálata:)

Ha $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor f'-nek a -4 zérushelye, és itt f' pozitívból negatívba megy át, ezért az f-nek valóban lokális maximumhelye van a -4-nél; (1 pont)

f''-nek zérushelye a -1, és itt f'' előjelet vált, ezért az f-nek valóban inflexiós pontja van itt. (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) a) Hány olyan 1000-nél kisebb *p* pozitív egész szám van, amelyre a *p* és a 42 relatív prímek? (6 pont)

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
…										…

A fehér, illetve szürke színű „L" alakú sávokba lévő számok összege:

$L_1 = 1$,

$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8$,

$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$

b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$. (4 pont)

c) Igazolja, hogy az első *n* pozitív köbszám összege

$$K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \quad \textbf{(6 pont)}$$

Megoldás:

a) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, így azokat az 1000-nél kisebb pozitív egész számokat keressük, melyek nem oszthatók sem 2-vel, sem 3-mal, sem 7-tel. (1 pont)

1-től 999-ig 2-vel osztható száma 499 darab,
3-mal osztható 333 darab,
7-tel osztható 142 darab, (1 pont)
2-vel és 3-mal (azaz 6-tal) osztható számok 166 darab,
2-vel és 7-tel (azaz 14-gyel) osztható szám 71 darab,
3-mal és 7-tel (azaz 21-gyel) osztható szám 47 darab, (1 pont)
végül pedig 2-vel, 3-mal és 7-tel, azaz 42-vel, osztható szám 23 darab van. (1 pont)

A keresett számok száma (logikai szita formulával) $999 - (499 + 333 + 142) + (166 + 71 + 47) - 23 = 286$. (1 pont)

286 1000-nél kisebb *p* pozitív egész szám van. (1 pont)

Alternatív megoldás:

1-től 42-ig a 42-höz relatív prímek: 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, ez 12 darab. (1 pont)

Ha *k* relatív prím a 42-höz, akkor $k + 42$ is, ezért bármelyik 42 egymást követő egész szám között 12 megfelelő szám van. (1 pont)

$999 = 23 \cdot 42 + 33$ (1 pont)

Így 1-től $(23 \cdot 42 =)966$ – ig $23 \cdot 12 = 276$ megfelelő szám van, (1 pont)

967-től 999-ig pedig annyi, amennyi 1-től 33-ig, azaz 10 darab. (1 pont)

A keresett számok száma: $(276 + 10 =)$**286**. (1 pont)

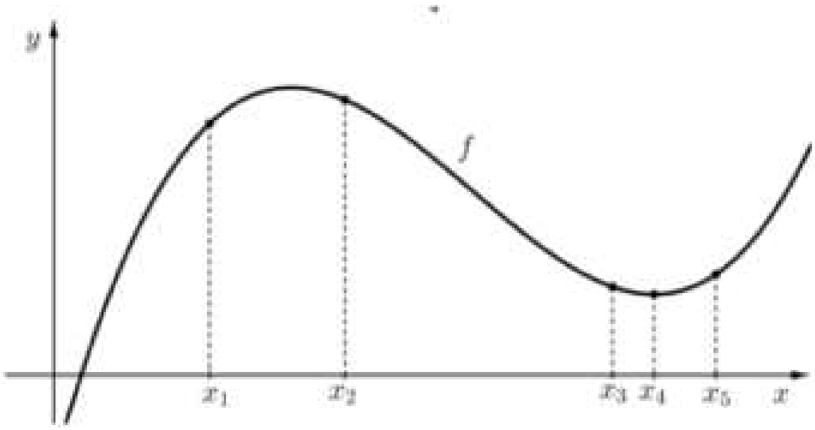
b) *Lásd: Bizonyítások 26. feladat*

c) *Lásd: Bizonyítások 26. feladat*

Összesen: 16 pont

13)

a) Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet. Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve a második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába!
(Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.) **(4 pont)**



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

b) Adott az $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$ egyenletű parabola.

Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x - y = k$ egyenletű egyenes érintse a parabolát, és határozza meg az érintési pont koordinátáit is! **(9 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények - Analízis 41. feladat*

b) (A keresett egyenes nem párhuzamos az adott parabola tengelyével.) Úgy kell meghatározni a k értékét, hogy az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy (rendezett valós számpár) megoldása legyen.

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8 \\ 4x - y &= k \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezzük y-t, és behelyettesítjük az első egyenletbe:

$y = 4x - k$, így $4x - k = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$ (1 pont)

Nullára rendezve: $-\frac{1}{4}x^2 - 3x + 7 + k = 0$ (1 pont)

A másodfokú egyenletnek akkor lesz egy megoldása, ha a diszkriminánsa nulla: (1 pont)

$9 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(7 + k) = 0$ (1 pont)

Innen $16+k=0$, azaz $k=-16$. (1 pont)

A $-\frac{1}{4}x^2-3x-9=0$ egyenlet (egyetlen) gyöke $x=-6$, (1 pont)

és ekkor $y(=4x-k=4\cdot(-6)-(-16))=-8$. (1 pont)

Az érintés pont $(-6;-8)$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az érintő egyenlete $y=4x-k$, így az érintő meredeksége 4. (1 pont)

Ezért az érintési pontban az $f(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^2+8\ (x\in\mathbb{R})$ másodfokú függvény deriváltjának értéke 4. (1 pont)

$f'(x)=\left(-\frac{1}{4}x^2+x+7\right)'=-\frac{1}{2}x+1$ (2 pont)

Így $-\frac{1}{2}x+1=4$, azaz $x=-6$. (1 pont)

$f(-6)\left(=-\frac{1}{4}(-6-2)^2+8\right)=-8$ (1 pont)

Az érintés pont $\mathbf{(-6;-8)}$. (1 pont)

Az érintési pontba húzható érintő egyenlete $y+8=4(x+6)$, azaz $y=4x+16$

(1 pont)

A k valós szám értéke tehát **−16** . (1 pont)

Összesen: 13 pont

14) Adott az $x^2-(4p+1)x+2p=0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van! (3 pont)

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke? (4 pont)

c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 31. feladat* (1 pont)

b) Ha a 3 gyöke az egyenletnek, akkor $9-3(4p+1)+2p=0$. (1 pont)

ahonnan $p=0,6$. (1 pont)

Az egyenlet ezzel az értékkel: $x^2-3,4x+1,2=0$. (1 pont)

A megoldóképletből adódik, hogy a másik valós gyök ekkor **0,4.** (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az egyenletnek mindig két valós gyöke van, ezért a gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint (a Viéte-formulák alapján), $x_2+3=4p+1$ és $3x_2=2p$. (1 pont)

Ez utóbbi alapján $p=\frac{3}{2}x_2$, (1 pont)

amelyet az első összefüggésbe helyettesítve:

$x_2+3=6x_2+1$, (1 pont)

ahonnan a másik gyök $\mathbf{x_2=0,4}$. (1 pont)

c) (A megadott egyenletnek mindig 2 valós gyöke van.)

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ (1 pont)

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint

$x_1 + x_2 = 4p + 1$ és $x_1x_2 = 2p$,

ezért $x_1^2 + x_2^2 = (4p+1)^2 - 2 \cdot 2p$. (2 pont)

$(4p+1)^2 - 2 \cdot 2p = 7$ (1 pont)

$16p^2 + 4p - 6 = 0$ (1 pont)

Ennek az egyenletnek a valós gyökei **0,5** és **-0,75**, így ezek a p paraméter keresett értékei. (1 pont)

Összesen: 13 pont

15) a) Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

Az $x^2 - 2x + 4 = mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van. (6 pont)

b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{3}{(1+\cos x)^2 + 2}$ függvény értékkészlete az $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$ intervallum. (5 pont)

c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz? (5 pont)

Megoldás:

a) Pontosan akkor van két valós gyök, ha $x^2 - 2x - mx + 4 = 0$ egyenlet diszkriminánsa pozitív. (1 pont)

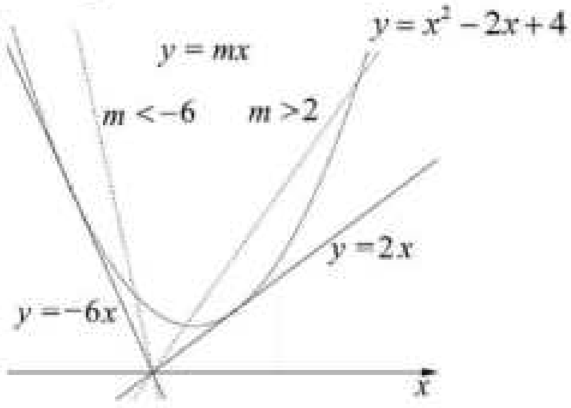
Az egyenlet $x^2 - (2+m)x + 4 = 0$, ezért $D = (2+m)^2 - 16$ (1 pont)

$D = m^2 + 4m - 12 > 0$ (1 pont)

Az $m^2 + 4m - 12 = 0$ egyenlet megoldásai -6 és 2. (1 pont)

Az $m \mapsto m^2 + 4m - 12$ másodfokú függvény képe „felfelé nyitott" parabola, ez ábrázolva is megfelelő. (1 pont)

Tehát $m < -6$ vagy $m > 2$ esetén igaz a megadott kijelentés, vagy intervallummal felírva: $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty]$ (1 pont)



b) *Függvények – Analízis 47. feladat*

c) *Lásd: Halmazok 14. feladat*

Összesen: 16 pont